Correction du devoir maison $n°9$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = 2X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. On a :
   $P_2 = 4X^2 - 1$
   $P_3 = 8X^3 - 4X$
   $P_4 = 16X^4 - 12X^2 + 1 = 16(X^4 - \frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{16})$
   Par ailleurs, les racines du polynôme $Q = Y^2 - \frac{3}{4}Y + \frac{1}{16}$ sont $\frac{3+\sqrt{5}}{8}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$.
   D'où $Q = (Y - \frac{3+\sqrt{5}}{8})(Y - \frac{3-\sqrt{5}}{8})$, ce qui permet d'avoir $P_4 = 16(X^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{8})(X^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{8})$.
   Donc $P_4 = 16(X - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}})(X + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}})(X - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}})(X + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}})$.
2. On le démontre par récurrence, à l'aide d'une récurrence double.

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ P(n)\ :\ \text{"deg}(P_n) = n\text{"}$$

   - Initialisation : On a bien $\deg(P_0) = 0$ et $\deg(P_1) = 1$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies.
     $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ donc $\deg(P_{n+2})$=$\deg(2XP_{n+1} - P_n)$.
     Or, par hypothèse de récurrence et règle sur le degré d'un produit,
     $\deg(XP_{n+1}) = n + 2$ et $\deg(P_n) = n$.
     Ces deux polynômes sont de degré différent
     d'où $\deg(2XP_{n+1} - P_n) = \max(\deg(XP_{n+1}, \deg(P_n)) = n + 2$.
     On a bien montré $P(n+2)$.
   - Conclusion : On a donc démontré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.

   Pour le coefficient dominant, on fait une récurrence également (on a besoin de connaître le degré avant de parler du coefficient dominant).

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ P(n)\ :\ \text{"le coefficient dominant de } P_n \text{ est } 2^n\text{"}$$

   - Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $P_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.
     Pour $n = 1$, on a bien $P_1 = 2X$ donc $P(1)$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $P(n)$ soit vraie.
     Par hypothèse de récurrence, $P_n = 2^nX^n + ...$ donc $P_{n+1} = 2X(2^nX^n + ...) + P_{n-1}$.
     Or, $\deg(P_{n-1}) = n-1$ donc le coefficient dominant est donné par le polynôme $2XP_n$, ce coefficient dominant est donc 2^{n+1}.
     Donc $P(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : On a donc démontré que $\forall n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de P_n est 2^n.
3. Pour la parité, on fait une récurrence également.

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ P(n)\ :\ \text{"}P_n \text{ est de la parité de } n\text{"}$$

   - Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $P_0 = 1$ pair donc $P(0)$ est vraie.
     Pour $n = 1$, on a bien $P_1 = 2X$ impair donc $P(1)$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraie.
     On a $P_{n+2}(-X) = 2{-X}P_{n+1}(-X) - P_n(-X) = (-1)^{n+2}\left(2XP_{n+1}(X) - P_n(X)\right)$.
     Donc $P(n+2)$ est vraie.
   - Conclusion : On a donc démontré que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est de la parité de n.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.
   (a) On a :
   $\sin((n+2)t) = \sin((n+1)t + t) = \sin((n+1)t)\cos(t) + \sin(t)\cos((n+1)t)$.
   $\sin(nt) = \sin((n+1)t - t) = \sin((n+1)t)\cos(t) - \sin(t)\cos((n+1)t)$.
   D'où, en sommant les 2 égalités ci-dessus $\sin(nt) + \sin((n+2)t) = 2\cos(t)\sin((n+1)t)$.
   (b) On le démontre par récurrence sur n, à l'aide d'une récurrence double.
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) \ : \ \text{"}\sin((n+1)t) = \sin(t)P_n(\cos(t)).\text{"}$$
   - Initialisation : Pour $n = 0$, $P_0 = 0$ donc on a bien $\sin(t) = \sin(t)P_0(\cos(t))$ donc $P(0)$ est vraie.
     Pour $n = 1$, $P_1 = 2X$ d'où $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) = \sin(t)P_1(\cos(t))$ donc $P(1)$ est vraie.
   - Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $P(n-1)$ et $P(n)$ soient vraie. On a
     $$\begin{aligned}\sin((n+2)t) &= 2\cos(t)\sin((n+1)t) - \sin(nt)\\ &\underset{\text{H.R.}}{=} 2\cos(t)\sin(t)P_n(\cos(t)) - \sin(t)P_{n-1}(\cos(t))\\ &= \sin(t)\left(2\cos(t)P_n(\cos(t)) - P_{n-1}(\cos(t))\right)\\ &= \sin(t)P_{n+1}(\cos(t))\end{aligned}$$
     On a bien montré $P(n+1)$.
   - Conclusion : On a donc démontré que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$, $\sin((n+1)t) = \sin(t)P_n(\cos(t))$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons $t = \frac{k\pi}{n+1}$, d'après la question précédente :
   $$\sin(k\pi) = \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}_{\neq 0} P_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$$
   d'où $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) = 0$.
   Le polynôme P_n est de degré n, il possède donc au plus n racines.
   On a donc trouvé toutes les racines de P_n : $\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\ ,\ k \in [\![1, n]\!]\right\}$.
   D'où $P_n = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$.
6. Nous avons deux expressions pour les racines de P_4 que l'on écrit par ordre croissant :
   $$\left\{-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right\}$$
   et
   $$\left\{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right\}.$$
   Donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.
   (a) D'après la relation de base : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_{k+2}(0) = -P_k(0)$. Or $P_0(0) = 1$ et $P_1(0) = 0$.
   D'où, si n est pair, $P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$ et si n est impair, $P_n(0) = 0$.
   (b) Soit p_n le produit des racines du polynômes scindé $P_n = a_nX^n + ... + a_0$.
   On a que $a_0 = P_n(0)$ et $a_n = 2^n$.
   Par ailleurs, $p_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$, d'où $p_n = \begin{cases}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n} \text{ si } n \text{ pair,}\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$
   On a $p_4 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{8^2} = \frac{4}{8^2} = \frac{1}{16}$ ce qui est bien en adéquation avec la formule trouvée ci-dessus.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sin((n+1)t) &= \mathrm{Im}(\mathbf{e}^{i(n+1)t}) \\
&= \mathrm{Im}\left((\cos(t) + \mathbf{i}\sin(t))^{n+1}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{i}^j \binom{n+1}{j} \cos^{n+1-j}(t)\sin^j(t)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} \cos^{n+1-2k-1}(t)\sin^{2k+1}(t) \\
&= \sin(t) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} \cos^{n-2k}(t)(1-\cos^2(t))^k
\end{aligned}$$

   (b) Posons $Q_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} X^{n-2k}(1-X^2)^k \in \mathbb{R}_n[X]$.
   On a $\forall t \in]0,\pi[$, $\sin(t)P_n(\cos(t)) = \sin((n+1)t) = \sin(t)Q_n(\cos(t))$.
   Or sin ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, donc $\forall t \in]0,\pi[, P_n(\cos(t)) = Q_n(\cos(t))$.
   D'où $\forall x \in]-1,1[, P_n(x) = Q_n(x)$.
   On en déduit que P_n et Q_n coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{R}$.
   D'où $P_n = Q_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} X^{n-2k}(1-X^2)^k$.
   On a $P_4 = \binom{5}{1}X^4 - \binom{5}{3}X^2(1-X^2) + \binom{5}{5}(1-X^2)^2 = 16X^4 - 12X^2 + 1$.
   Ce résultat est bien en adéquation avec la première question.

9. Soient deux entiers naturels n et m. On considère l'intégrale suivante :

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$$

   On utilise un changement de variable $\mathscr{C}_1$: $t = \mathrm{Arccos}(x)$.

$$\begin{aligned}
I_{n,m} &= \int_{\pi}^{0} P_n(\cos(t))\, P_m(\cos(t))\, \sqrt{1-\cos^2(t)}\ (-\sin(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} |\sin(t)| P_n(\cos(t))\ \sin(t) P_m(\cos(t))\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \sin((n+1)t)\ \sin((m+1)t)\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((n-m)t) - \cos((n+m+2)t)\, \mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}[t - \frac{\sin((n+m+2)t)}{n+m+2}]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \text{ si } n = m \\ \\ \frac{1}{2}[\frac{\sin((n-m)t)}{n-m} - \frac{\sin((n+m+2)t)}{n+m+2}]_0^{\pi} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P_n(x) \end{array} \right.$ est continue sur un segment, elle est donc bornée et elle atteint ses bornes. De plus, on peut montrer par récurrence que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sin((n+1)t) \leqslant (n+1)\sin(t)\,.$$

   On en déduit que : $\forall x \in]-1,1[, f_n(x) \leqslant n+1$. De plus, $f_n(1) = n+1 = (-1)^n f_n(-1)$.
   Donc f_n admet un maximum $n+1$ atteint en 1.